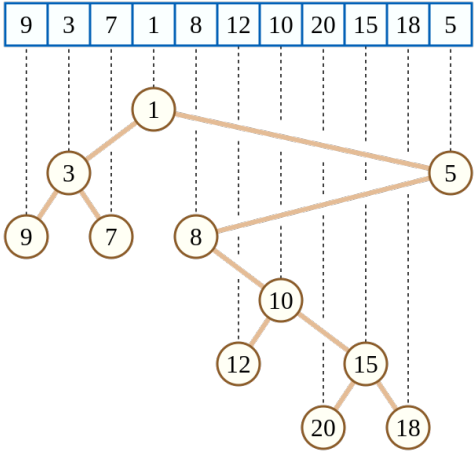
序列算法与序列问题

pwq

Cap1taL

2026 年 7 月

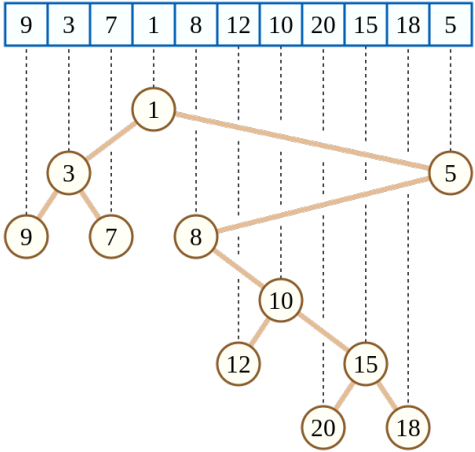
笛卡尔树



我们默认讨论小根的情况

- 笛卡尔树是一种二叉树。点集为 (i, a_i)。第一键值满足 BST 的性质，第二键值满足堆的性质。
- 直观来说，根节点为最小值，左右儿子分别为左右两侧的最小值，以此类推
- 运用一些数据结构可以随便在 $O(n \log n)$ 内建出笛卡尔树

我找了好多好多性质 (1)



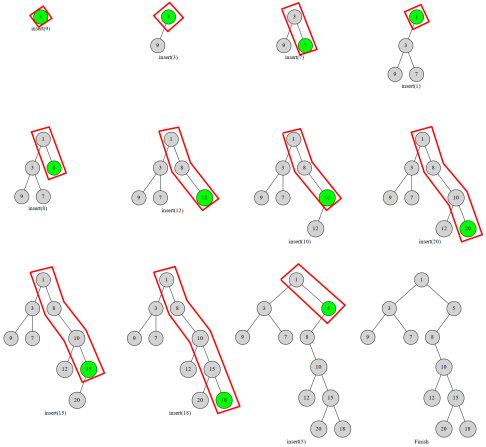
1. 笛卡尔树的一个子树 u 总是一个区间。
2. 在不改变区间最小值的情况下，一个子树 u 代表的区间是极大的。
3. 区间 $[L, R]$ 的最小值是 L, R 在笛卡尔树上的 LCA。
4. 随机排列的期望笛卡尔树高是 $O(\log)$ 的。

我找了好多好多性质 (2)

```
L[i] R[i]为最近的比a[i]小的数
for(int i=1;i<=n;i++){
    if(i-L[i]<R[i]-i){
        for(int j=L[i]+1;j<=i;j++){
            //do smth O(1)
        }
    }else{
        for(int j=i;j<R[i];j++){
            //do smth O(1)
        }
    }
}
```

- 这段代码的复杂度是 $O(n \log n)$
- 为什么？
- hint：树上启发式合并？

线性建笛卡尔树



- 维护右链
- 每次插入 u 从下向上比较右链，直到找到 v 使得 $a_v < a_u$
- 让 u 成为 v 的右儿子，v 原本的右儿子成为 u 的左儿子
- 每个点只会进出右链一次

Codeforces 1748E Yet Another Array Counting Problem

定义序列 x 在子段 $[l, r]$ 的「最左最大值位置」为最小的 i 满足 $x_i = \max\{x_l, \ldots, x_r\}$。
给定 n, m 和 $a[1..n]$，求有多少个序列 $b[1..n]$（$1 \le b_i \le m$）满足：
对任意 $[l, r]$，a 和 b 的最左最大值位置相同。
答案对 $10^9 + 7$ 取模。多组数据。
$\sum n \cdot m \le 10^6$

Solution

- 考虑给定的限制，要求所有区间都满足
- 不妨直接为值相等的元素钦定左大右小，然后考虑全局最大值，它们的位置需要相同
- 再递归向两侧考虑……笛卡尔树！
- “区间 $[L, R]$ 的最小值是 L, R 在小根笛卡尔树上的 LCA”
- 大根笛卡尔树同理
- 因此我们不难意识到，题目要求的是 a, b 序列的笛卡尔树形态相同

Solution

- 问题转化为给定一个序列 a 和值域 m，求有多少个序列 b 的笛卡尔树形态与 a 相同
- 设 $f_{u,v}$ 表示节点 u 的值为 v 的方案

$$f_{u,v} = \left(\sum_{k=1}^{v-1} f_{lc_u,k}\right) \times \left(\sum_{k=1}^{v} f_{rc_u,k}\right)$$

- 使用前缀和优化转移即可

AtCoder abc282_h Min + Sum

给定两个长度为 N 的序列 A, B。求满足下列条件的 (l, r) 个数：

$$\min\{A_l, \ldots, A_r\} + (B_l + \cdots + B_r) \leq S$$

$N \leq 2 \times 10^5,\ S \leq 3 \times 10^{14},\ A_i \leq 10^{14},\ B_i \leq 10^9$

Solution

- 最小值加上区间和太过神秘，我们尝试干掉最小值
- 又因为是计数问题，我们自然想到小根的笛卡尔树
- 我们考虑笛卡尔树一个子树的根节点，从而固定了 min
- 回顾关键性质？
- 预处理前缀和，枚举较小子树，再在另一侧二分即可
- 复杂度 $O(n\log^2 n)$

洛谷 P4755 Beautiful Pair

练手！

给定数列 $\{a\}$。数对 (i,j) $(i \le j)$ 是美丽的，当

$$a_i \times a_j \le \max\{a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j\}$$

求美丽的数对数量。

$n \le 10^5$，$a_i \le 10^9$

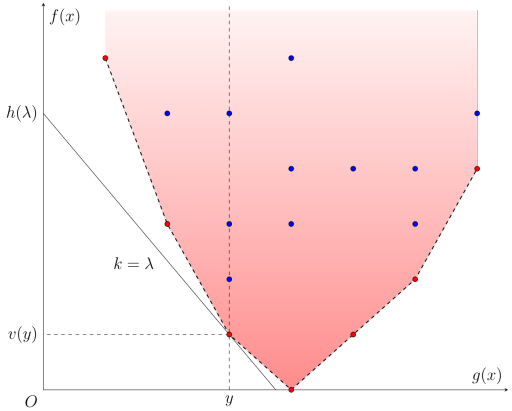
Solution

- 最大值加上乘积太过神秘，我们尝试干掉最大值
- 又因为是计数问题，我们自然想到大根的笛卡尔树
- (? 似曾相识)
- 我们考虑笛卡尔树一个子树的根节点，从而固定了 max
- 枚举轻子树，再在重子树中查询有多少点小于 $\frac{\max}{a}$
- 问题转化为 $O(n\log n)$ 次询问一个区间里有多少元素小于 V。
- 可以离线所有询问，无脑用可持久化线段树统一求解。并非今天的重点
- 复杂度 $O(n\log^2 n)$

WQS 二分的动机

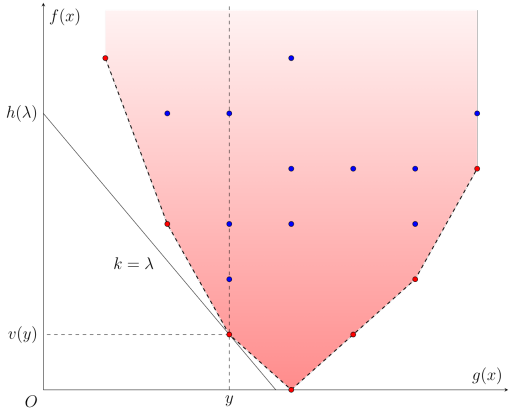
- 有 n 个元素，我们要求选出 k 个元素，最优化一个复杂的目标函数
- 由于目标函数较为复杂（甚至难以刻画），状态转移不得不成为二维的 $F(n,k)$，复杂度至少为 $O(nk)$。这可能是难以接受的。
- 而无元素个数限制的问题常常是容易考虑的
- 我们能不能每选一个物品就“惩罚”一下算法，再想办法巧妙地选取“惩罚”，使得算法恰好找到我们想要的 $f(n,k)$ 呢？
- 这只是一个粗略的想法。具体如何操作？有什么限制？

WQS 二分的基本思想



- 凸集，我们要求得某个 (x, y)
- 直接求不好求，尝试用直线去切？
- 为什么可以二分？
- 如何 check？

共线情形的处理



- 什么是共线情形？为什么会出现问题？
- 本质上，共线时，我们期望算法最后计算唯一的 check(λ)
- 方案一：在 check 中引入单调性，从唯一寻找 (x, y) 变为最优化不等关系。用直线方程代入得出答案
- 方案二：引入实数二分，不断缩小范围到 λ 附近

洛谷 P2619 Tree I

无向带权连通图，每条边为黑色或白色。求恰有 k 条白色边的最小权生成树。题目保证有解。

$V \leq 5 \times 10^4$，$E \leq 10^5$，边权 $[1, 100]$

Solution

- 是否有凸性？
- 可以 DP 暴力打表观察
- 较为理性：我们考虑一个个增加白边。加入的白边会在生成树上成环。我们要求环上必须有黑边，且希望新白边带来的增量尽可能小。不难发现两个限制都是越来越严苛的。因此答案下凸
- 因此使用 WQS 二分，check 时为每个白边加额外的惩罚，再跑 Kruscal 即可
- Kruscal 需要记录用了几个白边
- 防止共线只需要尽可能选白边即可
- 复杂度两个 log ？

洛谷 P5633 最小度限制生成树

n 点 m 边带权无向图，求边权和最小的生成树，且节点 s 的度数恰好为 k。若无解输出 Impossible。

$n \le 5 \times 10^4$，$m \le 5 \times 10^5$，$k \le 100$

Solution

- 我们把节点 s 相连的边染成白的
- 额外判断无解情况

Codeforces 739E Gosha is Hunting

Gosha 有 a 个精灵球和 b 个高级球。第 i 只宝可梦用精灵球捕获概率 p_i，用高级球概率 u_i。每只宝可梦每种球最多投一次，可同时投两种。求最优策略下期望捕获数的最大值。

$n, a, b \leq 2000$

Solution

- 两维限制
- 可以感受答案的上凸性。我们总是优先抓更好抓的宝可梦
- 考虑到数据范围并不大，我们可以用 wqs 二分来处理掉 a，内层再用 dp 暴力处理 b 的限制。此时精灵球数量无限，不过使用会带入惩罚
- 复杂度 $O(nb\log a)$

Codeforces 802M April Fools' Problem (hard)

n 天内准备 k 道题，每天最多准备一道（费用 a_i），每天最多打印一道（费用 b_i）。题目不能早于准备完成打印。求最小总费用。

$k \le n \le 5 \times 10^5$

Solution

- 旧事重提
- 容易感受到凸性，我们一开始总是先选择最好的打印策略，越往后打印策略的改进空间越小，是下凸的
- 因此给每个打印都赋一个惩罚，进行 wqs 二分即可

我分了好多好多治

这一部分的内容主要包括

- 基本分治
- CDQ 分治
- 线段树分治
- 树分治不太相同，我们放到树上算法章节

基本分治的思想

- 一个问题不好处理
- 将一个问题划分为多个（经常为两个）易求解的子问题，然后把问题留给后人，进行递归，最后合并得到整个问题的答案
- 没了
- 说起来非常简单，实际上分治较为灵活，更像是一种思想
- 具体的分治做法与具体题目密切相关

CDQ 分治的思想

- 基本分治有时把问题划分左右两个子问题，最后合并左右的答案
- 如果左右子问题之间相互影响怎么办？
- CDQ 分治的基本思想是将两侧的互相影响贡献补全
- 我们今天不涉及 CDQ 分治优化 DP 的部分
- 看具体题目

P1908 逆序对

求序列逆序对个数

$n \leq 5 \times 10^5$

Solution

- 我们不妨假设这个问题没有 $O(n\log n)$ 的做法（?）
- 考虑如何合并左右区间
- 我们需要处理跨区间的逆序对
- 先扫描左半侧的所有元素，将它们加入值域数据结构维护
- 扫描右半侧的所有元素，在值域数据结构上查询，得到逆序对数量
- 复杂度 $O(n\log^2 n)$

P3810 【模板】三维偏序 / 陌上花开

有 n 个元素，第 i 个元素有 a_i, b_i, c_i 三个属性，设 $f(i)$ 表示满足 $a_j \le a_i$ 且 $b_j \le b_i$ 且 $c_j \le c_i$ 且 $j \ne i$ 的 j 的数量。
对于所有 $d \in [0, n)$，求有多少 $1 \le i \le n$ 使得 $f(i) = d$。
对于所有数据，保证 $1 \le n \le 10^5$，$1 \le a_i, b_i, c_i \le k \le 2 \times 10^5$。

Solution

- 我们先立刻对 a 排序
- 再考虑对第二维 b 做归并排序。是的，可以打乱 a
- 这不是白干了吗？
- 虽然左右两个子问题内的 a 已经被打乱了，但在我们合并左右问题之前，左侧所有元素的 a 均小于右侧元素的 a
- 若我们只考虑跨中线的元素对，那么 a 第一维限制实际上仍能满足
- 双指针扫描 b 做归并，实时维护一个值域数据结构，把左侧的 c 加入，用右侧的 c 查询
- 复杂度 $O(n \log n \log V)$
- 需要去重后单独考虑重复元素的贡献。
- 刚开始对 a 排序时第二关键字也需要对 b 排序，否则 a 相同时会出问题。

洛谷 P4169 天使玩偶

二维平面上，动态加点，询问与 (x, y) 曼哈顿距离最近的点。

- $t = 1$：添加点 (x, y)
- $t = 2$：询问到 (x, y) 的最近曼哈顿距离

$n, m \leq 3 \times 10^5$，$x, y \leq 10^6$

Solution

- 乍一看似乎是比较抽象的数据结构
- 写出曼哈顿距离的表达式 $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$
- 绝对值导致我们没法做任何处理。想办法去绝对值
- 能发现如果点在询问的左下方，那么绝对值可以直接脱去，化为 $(x_1 + y_1) - (y_1 + y_2)$
- 问题就可以转化为，对于一个询问，我们找：
  - 插入时间在询问之前
  - x 比 x_q 小
  - y 比 y_q 小
  - $x + y$ 最大的点
- 这是一个三维偏序问题，因此可以使用 CDQ 分治解决。至于不同方向可以旋转后处理，或者更改最优化的目标

Codeforces 848C Goodbye Souvenir

长为 n 的序列 a。定义区间 $[l, r]$ 中形状 x 的记忆值为其最后与首次出现位置之差，区间记忆值为所有出现形状的记忆值之和。支持：

- $1\ p\ x$：单点修改 $a_p = x$
- $2\ l\ r$：查询 $[l, r]$ 的记忆值

$n, m \leq 10^5$

Solution

- 所求目标较难处理，因为它与具体取哪个区间相关
- 我们考虑转化“最后与首次出现位置之差”
- 记 L_i 表示 a_i 上一次出现的位置
- 所求变为，求和 $i - L_i$（要求 $L_i \geq l$ 且 $i \leq r$）
- 但是这里是修改不是新增，怎么办？
- 抽象为三维坐标点，然后叠一个除了时间均相同的点，点权做差分即可
- 使用 CDQ 分治

洛谷 P3658 Why Did the Cow Cross the Road III P

给出两个排列 A, B，相等数之间连线。求数对 (i, j) 的个数，使得对应线交叉且 $|i - j| > k$。

$n \leq 10^5$

Solution

- 目标依旧抽象，我们尝试形式化刻画
- 设数 x 在 A 中的位置为 P_x，B 中为 Q_x
- “(i,j) 对应线交叉”意味着 $P_i < P_j$ 且 $Q_j > Q_i$（或者反过来）
- 同时还需要满足 $|i-j| > k$
- 绝对值可以分讨掉
- 于是变成 P, Q, x 的三维偏序，使用 CDQ 分治

洛谷 P6406 Norma

给定正整数序列 a，求

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}(j-i+1)\cdot\min(a_i..a_j)\cdot\max(a_i..a_j)$$

答案对 10^9 取模。
$n \le 5\times 10^5$，$a_i \le 10^8$

Solution

- 看到目标式所有区间的形式，我们直接考虑分治。现在只需要考虑跨过区域中点的区间
- 枚举左半侧，固定区间左端点。区间最值的分布有四种形式，我们分别讨论

Solution

1 最值都在左侧

- 我们发现，可行的右端点应该是一段前缀，满足在 min 和 max 之间
- 只有区间长度会变化，是等差数列，可以直接求

Solution

2 最值都在右侧

- 可行的右端点应该是一段后缀，满足 min 和 max 完全包含了左半侧枚举后缀的值域
- 考虑把区间长度从 *mid* 处断开，然后分配拆项，即可进行维护
- 需要额外维护每个位置的，后缀最值与到 *mid* 距离的乘积
- 或者直接对称过来按 # 1 做也可以，也需要额外维护对称的数据

Solution

3 最大值在左侧，最小值在右侧

- 可行的右端点应该是一段连续区间
- 依旧把区间长度从 *mid* 处断开，然后分配拆项，即可进行维护

4 最小值在左侧，最大值在右侧

- 与 # 3 完全对称，这里省去

Solution

为什么用笛卡尔树不好？

线段树分治能干什么?

- 若存在一些操作，这些操作的“存活时效”是一段连续的区间，且穿插着询问，则我们可以考虑使用线段树分治
  - 例如添加一个元素，删除一个元素，则每个元素的“存活时效”是一段连续的区间
- 线段树分治可以把这样的问题变为 $O(Q\log Q)$ 次的“增加操作”和“撤销上一次的添加”
- 撤销会更好做吗?

线段树分治做了什么?

- 将所有操作和询问离线
- 我们在长度为 Q 的时间轴上建立一颗线段树，在线段树的每个节点上都开一个 vector。
- 若在 T_1 时插入一个元素 E，在 T_2 时间移除这个元素 E，它的存活时间即为 $[T_1, T_2]$
- 我们把 $[T_1, T_2]$ 这个区间在线段树上拆成 $O(\log)$ 个区间，在对应的节点的 vector 里“挂载 E”
- 对于回答询问，我们完整遍历整个线段树
  - 从上向下递归经过一个节点时，我们“处理”节点上“挂载”的所有元素
  - 当访问到了叶子时，我们回答这个时间点对应的询问（若有）
  - 递归结束，向上退出这个节点时，我们不断执行撤销

洛谷 P5787 【模板】线段树分治 / 二分图

n 个节点的图，k 个时刻内 m 条边出现后消失。求每个时刻图是否为二分图。
$n, k = 10^5$，$m = 2 \times 10^5$

Solution

- 把边的存在时段挂到时间轴线段树上
- 使用可撤销的拓展域并查集维护是否能为二分图
  - 拓展域并查集：P1525 [NOIP 2010 提高组] 关押罪犯
- 遍历线段树回答询问即可

洛谷 P4511 日程管理

T 天，支持添加/删除任务 (t_i, p_i)（截止日期 t_i，收益 p_i），每任务需一天完成。每次操作后输出当前能完成的最大总收益。

$T, Q \leq 3 \times 10^5$

Solution

- 离线所有操作，处理出一个任务从添加到删除（或持续到最后）的时段
- 挂到线段树上
- 遍历线段树，动态添加任务
- 撤销可以用栈暴力维护操作序列

Codeforces 576E Painting Edges

n 点 m 边无向图，k 种颜色。q 次询问，每次将边 e_i 染成颜色 c_i。要求任意时刻每种颜色的子图均为二分图，合法则执行，否则忽略。

$n, m, q \leq 5 \times 10^5$，$k \leq 50$

Solution

- 依旧检查二分图，我们还是使用拓展域并查集
- 注意到颜色数 k 并不大，因此我们可以暴力开 k 个拓展域并查集
- 对每个边每种颜色的存在时段，放到时间轴上线段树分治
- 问题在于我们不知道每次操作是否会执行，所以事实上我们不能确定“每个边每种颜色的存在时段”
- 解决方案依旧使用线段树分治，但我们不一开始就挂载所有边的颜色上树，而是在每次染色操作的最开始进行检查，如果可行再挂载上树
- 但我们并不知道“这个颜色会持续多长时间”，因为可能下一次对同一条边的染色不执行。这无关紧要，我们可以先挂载确定的时段，如果下一次染色失败再手动延长即可
- 这道题提醒我们，线段树分治实际使用时仍然是沿时间递增扫描的，也可以解决这类有某种“伪强制在线”风味的题目

Codeforces 603E Pastoral Oddities

n 个点，依次添加 m 条带权边。每次添加后，判断是否存在边集使每个点度数为奇数，若存在则求最大边权的最小可能值。

$n \le 10^5$，$m \le 3 \times 10^5$

Solution

- " 存在边集使每个点度数为奇数" 这件事情过于神秘，我们想办法转化它
- 我们不妨看看加边会发生什么
  - 在奇度点之间加边，使得奇度点减二
  - 在偶度点之间加边，使得奇度点加二
  - 在奇度和偶度点之间加边，不会改变奇度点的数量
- 这表明如果存在联通块大小是奇数就会爆炸
- 那是否只要联通块大小都是偶数就可以呢？

Solution

“是否只要联通块大小是偶数就可以能取出对应的边集”

- 我们考虑直接构造
- 取出一个生成树，从下往上考虑每个节点与父亲的边是否选取
- 如果一个节点的子节点连线已经是奇数，我们就不连父亲，反之则连接父亲
- 问题是根节点的度数能否得到保证
- 注意到总度数必为偶数。而除了根节点的点数为奇数，它们又都是奇度点，这要求根节点也必须为奇度点，证毕

因此，图存在满足条件的边集，仅当每个连通块的点数均为偶数

Solution

- 现在我们考虑静态的问题，即怎么让最大边权最小
- 可能立刻联想到二分答案，每次 check 就用所有可用的边判断。但这个做法看起来非常浪费。
- 于是我们就能联想到 kruskal 的过程，从小到大加入边，并用并查集实时维护联通块。若加入一条边后只存在偶数联通块，那么这个边权就是我们的答案
- 如何拓展到动态？

Solution

- 现在我们考虑静态的问题，即怎么让最大边权最小
- 可能立刻联想到二分答案，每次 check 就用所有可用的边判断。但这个做法看起来非常浪费。
- 于是我们就能联想到 kruskal 的过程，从小到大加入边，并用并查集实时维护联通块。若加入一条边后只存在偶数联通块，那么这个边权就是我们的答案
- 如何拓展到动态？

Solution

- 发现一条边一旦被放弃使用，就再也不可能被使用
- 换言之，我们的答案是“单调递减”的

Thanks!